Grundlagen

1. Aufgabe: (*Vollständige Induktion*)

Beweise mittels vollständiger Induktion.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt: $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$.

Zusatz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{2n}{n} < 4^n$.

2. Aufgabe: (*Darstellung komplexer Zahlen*)

Skizziere die folgenden Mengen.

a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = 5\}$

b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z+2-i| \leq 2\}$

c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}, |\operatorname{Im}(z)| > \frac{3}{4}\}$

3. Aufgabe: (*(Un-)Gleichungen mit reellen Zahlen*)

Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllen.

a) $x^2 - 9 \leq 8x$

b) $|3x + 15| = 2$

c) $\frac{4|x-2|}{2x-1} < 1$

4. Aufgabe: (*Mengen*)

Untersuche, ob folgende Mengen $M_1, M_2, M_3 \subseteq \mathbb{R}$ nach oben oder unten beschränkt sind. Bestimme ggf. das Supremum bzw. Infimum. Gib außerdem an, ob es sich um ein Maximum bzw. Minimum der Menge handelt.

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-m}{n} \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}\}$

b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 3 > 6, x < 0\}$

c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } nx = n^2 + 2\}$

Folgen

1. Aufgabe:

a) Zeige mit Hilfe der Definition, dass die Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1-2n}{5+3n}$$

konvergiert. Das heißt: Bestimme den Grenzwert a und gib zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ an so, dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

b) Zeige mit Hilfe der Definition, dass die Zahlenfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = 2^n$$

nicht beschränkt ist und somit divergiert.

2. Aufgabe:

Untersuche folgende reelle Zahlenfolgen auf Konvergenz und gib ggf. den Grenzwert an!

$$a_n = \frac{n^2+3n+5}{n^2+4n+16}, \quad b_n = \frac{5-\sqrt[n]{23}}{\sqrt[n]{n}+\frac{1}{n^2}}, \quad c_n = \sqrt{3n+6}-\sqrt{3n+1}$$

$$d_n = \sqrt[4]{4+\frac{n-1}{n+1}}, \quad e_n = \frac{1}{n}\cdot\sin(n^2), \quad f_n = 9^{n+1}\cdot\left(\frac{n-1}{3n}\right)^{2n}$$

3. Aufgabe:

Untersuche folgende rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz!

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+a_n} \quad \text{mit } a_1 = 0$$

$$b_{n+2} = \frac{2}{3}\cdot b_{n+1} + \frac{1}{2}\cdot b_n \quad \text{mit } b_1 = 1, b_2 = 2$$

(Hinweis zur Monotonie von b_n: Betrachte im Induktionsschritt $b_{n+3} - b_{n+2}$)

4. Aufgabe:

Man gebe alle Häufungspunkte der Folgen sowie für (a_n) den Limes superior und den Limes inferior an! Konvergieren die Folgen?

$$a_n = \frac{1}{n} + 2\cdot(-1)^n, \quad b_n = \left(\frac{5n+7}{n}\right)\cdot i^n$$

Reihen

1. Aufgabe:

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^3}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-n}}{n}$

e) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}$

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-n-1}}$

2. Aufgabe:

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und bestimme ihren Grenzwert:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n}$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{5^n}$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4-3^n}{(n+1)!}$

3. Aufgabe:

Welche Aussagen sind richtig, welche falsch? Beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel!

- ☐ Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k + b_k$ konvergent.
- ☐ Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k)^2$ konvergent.
- ☐ Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent. Dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot b_k$.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen

1. Aufgabe:

Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$
stetig und differenzierbar?

2. Aufgabe:

Untersuche die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$g(x) := \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ e^{xln(x)} & x > 0 \end{cases}$

a) auf Stetigkeit

b) auf Differenzierbarkeit

3. Aufgabe:

Untersuche die auf dem Intervall $[0, \infty)$ definierte Funktion
$h(x) := \begin{cases} x^2 cos(\frac{1}{x}) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit!

4. Aufgabe:

Gegeben ist die Funktion $arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
Berechne die Ableitung von $arctan$.

5. Aufgabe:

Untersuche die Gleichung $e^{\sqrt{x}} = sin(x) + 2$ auf Lösungen in den positiven reellen Zahlen.

Beweise

1. Aufgabe:

Beweise für $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

2. Aufgabe:

Beweise: Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge ist und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge ist, welche $a_n - b_n \to 0$ für $n \to \infty$ erfüllt, so konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3. Aufgabe:

Wahr oder Falsch?

- ☐ Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Falls $\lim_{n\to\infty} 2a_n = 0$ gilt, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- ☐ Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

  konvergent.
- ☐ Jede monoton fallende Folge ist eine Nullfolge.
- ☐ Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.
- ☐ Jede Cauchy-Folge konvergiert.

4. Aufgabe:

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge ist, die für alle $n \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft $a_n \geq 0$ erfüllt. Beweise: Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

5. Aufgabe:

Beweise: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

6. Aufgabe:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Beweise: Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ die Aussage $a_n > 0$ gilt.

7. Aufgabe:

Beweise für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{2}x^2 + 3 \geq 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x^2}.$$

8. Aufgabe:

Beweise: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$xy \leq 0 \iff |x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}.$$

9. Aufgabe:

Beweise: Für $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ gilt

$$\mathrm{Im}(z + \frac{1}{z}) = 0 \iff \mathrm{Im}z = 0 \vee |z| = 1.$$