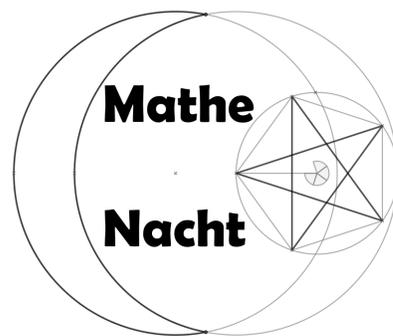
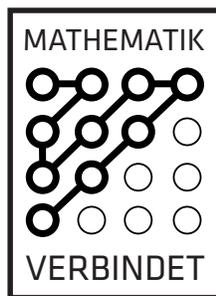


# Grundlagen



## 1. Aufgabe: (Vollständige Induktion)

Beweise mittels vollständiger Induktion.

a) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$ .

b) Für alle  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  gilt:  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$ .

**Zusatz:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\binom{2n}{n} < 4^n$ .

## 2. Aufgabe: (Darstellung komplexer Zahlen)

Skizziere die folgenden Mengen.

a)  $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = 5\}$

b)  $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z + 2 - i| \leq 2\}$

c)  $M_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}, |\operatorname{Im}(z)| > \frac{3}{4}\}$

## 3. Aufgabe: ((Un-)Gleichungen mit reellen Zahlen)

Bestimme alle  $x \in \mathbb{R}$ , welche die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllen.

a)  $x^2 - 9 \leq 8x$

b)  $|3x + 15| = 2$

c)  $\frac{4|x-2|}{2x-1} < 1$

## 4. Aufgabe: (Mengen)

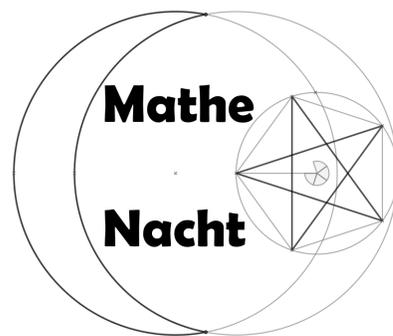
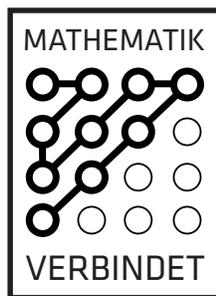
Untersuche, ob folgende Mengen  $M_1, M_2, M_3 \subseteq \mathbb{R}$  nach oben oder unten beschränkt sind. Bestimme ggf. das Supremum bzw. Infimum. Gib außerdem an, ob es sich um ein Maximum bzw. Minimum der Menge handelt.

a)  $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-m}{n} \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}\}$

b)  $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 3 > 6, x < 0\}$

c)  $M_3 = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } nx = n^2 + 2\}$

# Folgen



## 1. Aufgabe:

a) Zeige mit Hilfe der Definition, dass die Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \frac{1 - 2n}{5 + 3n}$$

konvergiert. Das heißt: Bestimme den Grenzwert  $a$  und gib zu  $\varepsilon > 0$  ein  $N(\varepsilon)$  an so, dass für alle  $n \geq N(\varepsilon)$  gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

b) Zeige mit Hilfe der Definition, dass die Zahlenfolge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$b_n = 2^n$$

nicht beschränkt ist und somit divergiert.

## 2. Aufgabe:

Untersuche folgende reelle Zahlenfolgen auf Konvergenz und gib ggf. den Grenzwert an!

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 5}{n^2 + 4n + 16}, \quad b_n = \frac{5 - \sqrt[n]{23}}{\sqrt[n]{n} + \frac{1}{n^2}}, \quad c_n = \sqrt{3n+6} - \sqrt{3n+1}$$

$$d_n = \sqrt[4]{4 + \frac{n-1}{n+1}}, \quad e_n = \frac{1}{n} \cdot \sin(n^2), \quad f_n = 9^{n+1} \cdot \left(\frac{n-1}{3n}\right)^{2n}$$

## 3. Aufgabe:

Untersuche folgende rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz!

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2 + a_n} \quad \text{mit } a_1 = 0$$

$$b_{n+2} = \frac{2}{3} \cdot b_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot b_n \quad \text{mit } b_1 = 1, b_2 = 2$$

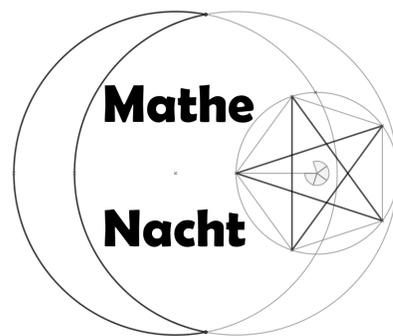
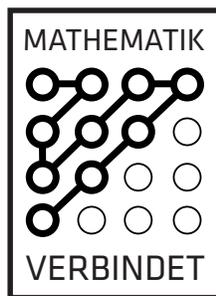
(Hinweis zur Monotonie von  $b_n$ : Betrachte im Induktionsschritt  $b_{n+3} - b_{n+2}$ )

## 4. Aufgabe:

Man gebe alle Häufungspunkte der Folgen sowie für  $(a_n)$  den Limes superior und den Limes inferior an! Konvergieren die Folgen?

$$a_n = \frac{1}{n} + 2 \cdot (-1)^n, \quad b_n = \left(\frac{5n+7}{n}\right) \cdot i^n$$

# Reihen



## 1. Aufgabe:

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^3}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$

d)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-n}}{n}$

e)  $\sum_{n=3}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}$

g)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-n-1}}$

## 2. Aufgabe:

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und bestimme ihren Grenzwert:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n}$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{5^n}$

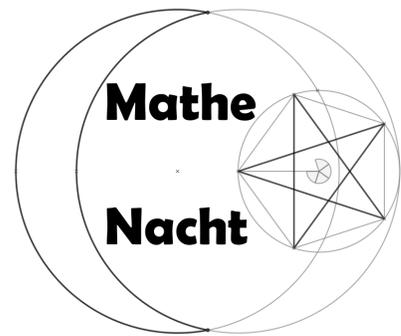
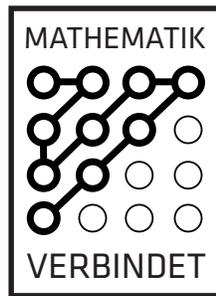
c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4-3^n}{(n+1)!}$

## 3. Aufgabe:

Welche Aussagen sind richtig, welche falsch? Beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel!

- Sind  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  zwei konvergente Reihen, so ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k + b_k$  konvergent.
- Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent. Dann ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k)^2$  konvergent.
- Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent. Dann konvergiert auch  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot b_k$ .

# Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen



## 1. Aufgabe:

Für welche Werte  $a, b \in \mathbb{R}$  ist die folgende Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$$

stetig und differenzierbar?

## 2. Aufgabe:

Untersuche die Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(x) := \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ e^{x \ln(x)} & x > 0 \end{cases}$$

a) auf Stetigkeit

b) auf Differenzierbarkeit

## 3. Aufgabe:

Untersuche die auf dem Intervall  $[0, \infty)$  definierte Funktion

$$h(x) := \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit!

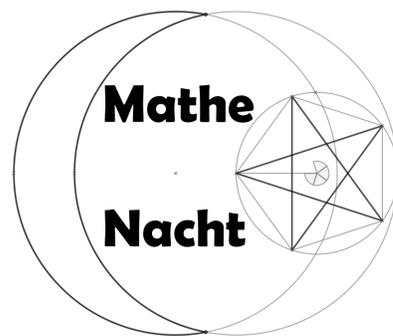
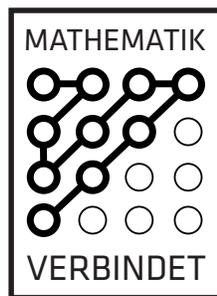
## 4. Aufgabe:

Gegeben ist die Funktion  $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$   
Berechne die Ableitung von  $\arctan$ .

## 5. Aufgabe:

Untersuche die Gleichung  $e^{\sqrt{x}} = \sin(x) + 2$  auf Lösungen in den positiven reellen Zahlen.

# Beweise



## 1. Aufgabe:

Beweise für  $x, y \in \mathbb{R}$  die Ungleichung  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

## 2. Aufgabe:

Beweise: Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente reelle Zahlenfolge ist und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge ist, welche  $a_n - b_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  erfüllt, so konvergiert auch  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

## 3. Aufgabe:

Wahr oder Falsch?

- Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge. Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n = 0$  gilt, so konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
- Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Nullfolge. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konvergent.

- Jede monoton fallende Folge ist eine Nullfolge.
- Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.
- Jede Cauchy-Folge konvergiert.

## 4. Aufgabe:

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge ist, die für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Eigenschaft  $a_n \geq 0$  erfüllt. Beweise: Falls  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert, so konvergiert auch  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ .

## 5. Aufgabe:

Beweise: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gilt

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

## 6. Aufgabe:

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente reelle Zahlenfolge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ . Beweise: Es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $n \geq N$  die Aussage  $a_n > 0$  gilt.

**7. Aufgabe:**

Beweise für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  die Ungleichung

$$\frac{1}{2}x^2 + 3 \geq 2 \left( x + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2x^2}.$$

**8. Aufgabe:**

Beweise: Für  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$xy \leq 0 \iff |x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}.$$

**9. Aufgabe:**

Beweise: Für  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$  gilt

$$\operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0 \iff \operatorname{Im}z = 0 \vee |z| = 1.$$